На правах рукописи

Судаков Иван Алексеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРИОЛИТОЗОНЫ И АТМОСФЕРЫ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Великий Новгород – 2011

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новгородской государственный университет имени Ярослава Мудрого» на кафедре прикладной математики и информатики.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Сукачева Тамара Геннадьевна
Научный консультант:	доктор физико-математических наук, доцент Вакуленко Сергей Августович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Захаров Анатолий Юльевич
	кандидат физико-математических наук, доцент Фролькис Виктор Абрамович
Ведущая организация:	ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет)

Защита диссертации состоится «26» января 2012 года в 15.30 на заседании диссертационного совета **Д 212.168.04** при Новгородском государственном университете имени Ярослава Мудрого по адресу: 173003, г. Великий Новгород, ул. Б. С–Петербургская, д. 41.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

Автореферат разослан «____» декабря 2011 года

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 212.168.04,
кандидат физико-математических наук,
доцент Токмачев М. С.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертации

Современный подход к моделированию климатической системы основан на теории динамических систем и теории бифуркаций [В.П. Дымников, 2005]. Важнейшей является концепция критического элемента (это какой-либо элемент климатической системы, который под воздействием малых возмущений может перейти в качественное иное состояние), введенная недавно Т. Лентоном [T. Lenton, 2008].

Одним из наиболее актуальных для изучения критических элементов является криолитозона (или вечная мерзлота, многолетнемерзлые грунты), которая входит в подсистему «криосфера» климатической системы и достаточно тесно связана положительной обратной связью (за счет эмиссии парниковых газов) с подсистемой «атмосфера». Частичное или полное исчезновение вечной мерзлоты под воздействием глобальных климатических изменений может привести к серьезным экономическим и политическим проблемам в северных регионах планеты. Таяние вечной мерзлоты в условиях глобального потепления обуславливает дополнительную эмиссию парниковых газов (в особенности метана), которые до этого времени были законсервированы в мерзлотной толще. Н. Шахова и др. [N. Shakhova, et.al., 2010] предположили, что срабатывание подобного «метангидратного ружья» может привести к климатической катастрофе.

В связи с этим, в последнее время исследованиям эволюции и устойчивости криолитозоны (включая проблему эмиссии метана) в условиях изменяющегося климата посвящены многочисленные работы. В основном в них рассматриваются различные модели термического режима криолитозоны, в основе которых лежит задача Стефана, которая в рамках достаточно сложных краевых условий требует эффективных численных методов решения и реализации их на базе современных комплексов программ для ЭМВ. Моделирование эмиссии метана при изменении термического режима криолитозоны происходит на основе комплексов программ для конкретных типов криолитозоны (например, мерзлотных торфяников или озер). Модели, положенные в основу таких программ, являются эмпирическими и применимы только для исследования конкретных географических районов. Однако до сих пор не было никакой достаточно общей и математически обоснованной теории, описывающей эволюцию криолитозоны (в процессе взаимодействия с атмосферой) как критического элемента климатической системы и подтверждающей гипотезу «метангидратного ружья». Актуальность данной проблемы, необходимость дальнейшего развития моделей термического режима криолитозоны, исследования взаимодействия криолитозоны и атмосферы в контексте теории динамических систем позволяет сформулировать

Цель настоящей работы: исследование взаимодействия криолитозоны и атмосферы как критического элемента климатической системы методами математической физики, теории бифуркаций и динамических систем, а также численными методами.

Основные задачи исследования:

1. Разработать модель для исследования термического режима криолитозоны на основе эффективной численной схемы и выполнить ее программную реализацию.
2. На основе вычислительного эксперимента с использованием современных комплексов программ, исследовать взаимодействие криолитозоны (в случае мерзлотных торфяников) с атмосферой.
3. Разработать модель динамики протаивания криолитозоны (в случае мерзлотного озера) на основе современной теории фазовых переходов и асимптотических методов.
4. Обобщить радиационно-конвективную модель атмосферы на случай эмиссии метана из криолитозоны. Изучить бифуркации в этой модели, определить параметры точки бифуркации (критической точки), то есть найти критический для моделируемой системы уровень эмиссии метана.

Методы исследования

В работе применялись методы теории динамических систем, включая теорию бифуркаций и аттракторов, асимптотические и стохастические методы, вариационные методы, методы теории фазовых переходов, методы математической теории климата, компьютерные методы моделирования климата, методы теории переноса теплового излучения и радиационного теплообмена в газовых средах.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Модель, описывающая термический режим криолитозоны, реализованная на основе новой для данной области исследований эффективной численной схемы Патанкара и представленная в виде комплекса программ для ЭВМ (который находится на регистрации в Роспатенте). Кроме того, продемонстрированы результаты вычислительного эксперимента с этой моделью – прогнозы протаивания вечной мерзлоты Ямала в XXI веке. Доказана абсолютная устойчивость схемы Патанкара.
2. Результаты вычислительного эксперимента с использованием современного комплекса программ «LPJ-WHyMe», моделирующего эмиссию метана из криолитозоны в атмосферу (в случае мерзлотных торфяников). Указаны границы использования комплекса программ «LPJ-WHyMe» на основе сравнения с другими комплексами программ и наблюдательными данными.

3. Асимптотическая модель динамики протаивания криолитозоны (в случае мерзлотных озер), основанная на применении нелинейных методов теории фазовых переходов. Представлены оценочные прогнозы эмиссии метана из криолитозоны в атмосферу.

4. Обобщенная радиационно-конвективная модель атмосферы с учетом эмиссии метана из криолитозоны. Развиты математические методы, позволяющие изучать критические точки (точки бифуркации) этой модели, связанные с эмиссией парниковых газов. Доказана возможность катастрофических бифуркаций в климатической системе, порожденных эмиссией метана из криолитозоны и получена явная формула для критического значения интенсивности такой эмиссии. Тем самым обоснована гипотеза «метангидратного ружья».

Научная новизна полученных результатов заключается в следующем:

1. Впервые создана модель для расчета термического режима криолитозоны на основе достаточно эффективной численной схемы Патанкара, реализованная в виде комплекса программ для ЭВМ и апробированная в ходе вычислительного эксперимента.
2. Впервые нелинейные методы теории фазовых переходов в совокупности с асимптотическими методами исследования математических моделей применены к изучению динамики протаивания мерзлотных озер и прогнозированию будущей эмиссии метана из криолитозоны в атмосферу.
3. Впервые предложена модель, с использованием классических уравнений математической физики, которая позволяет описывать бифуркации атмосферы под влиянием эмиссии парниковых газов. Математически обоснована теория «метангидратного ружья». Рассчитан критический уровень эмиссии метана в атмосферу, получена явная аналитическая формула с конкретной зависимостью от фундаментальных физических параметров атмосферы.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней доказано существование катастрофических бифуркаций атмосферы под влиянием эмиссии метана из криолитозоны и вычислен критический уровень такой эмиссии. Предложенные модели изучения термического режима криолитозоны и динамики протаивания мерзлотного озера могут быть использованы для прогнозирования опасных климатических явлений в зоне вечной мерзлоты. Программа расчета термического режима криолитозоны может быть полезна нефтегазодобывающим предприятиям, расположенным в зоне вечной мерзлоты, для изучения вопросов, связанных со стабильностью инфраструктуры. Учет обнаруженных проблем при использовании комплекса программ для вычисления эмиссии метана из торфяников, несомненно, будет полезен при построении прогнозов изменения климата.

Апробация

Результаты исследования докладывались и обсуждались на 14 научных конференциях различного уровня и специализации, например, таких как:

- Atmospheric Sciences Workshop, Кембридж, Великобритания, 2009 г.
- Workshops on Inverse Problems, Data, Mathematical Statistics and Ecology, Линчёнпинг, Швеция, 2010 г.
- IPY Oslo Science Conference, Осло, Норвегия, 2010 г.
- XXV IUGG General Assembly, Мельбурн, Австралия, 2011 г.
- IMA Conference on the Mathematics of the Climate System, Рэдинг, Великобритания, 2011 г.
- 3rd Integrated Land Ecosystem-Atmosphere Processes Study Science Conference, Гармиш-Партенкирхен, Германия, 2011 г.

Кроме того, результаты работы заслушивались на семинарах в следующих организациях:

- Научный семинар Международного центра по окружающей среде и дистанционному зондированию им. Нансена, г. Санкт-Петербург, 2008-2011 годы.
- На заседаниях кафедры высшей математики и информатики Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна (2010-2011 годы), кафедры климатологии и мониторинга окружающей среды Санкт-Петербургского государственного университета (2009-2011), кафедры прикладной математики и информатики Новгородского государственного университета (2011).

Результаты исследования были использованы автором в учебном процессе при проведении учебных курсов по специальности 020600 Гидрометеорология: «Методы математической физики», «Климатология» в Российском государственном гидрометеорологическом университете (г. Санкт-Петербург).

Работа выполнялась в рамках: персональных грантов для молодых ученых Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна (2010, 2011 гг.); гранта Исследовательского Совета Норвегии (Research Council of Norway) по проекту YGGDRASIL (грант № 195740/V11), гранта Министерства образования и науки Германии по программе «Изменения окружающей среды» лаборатории полярных и морских исследований им. О.Ю. Шмидта (грант № OSL-11-21), а также Декартовской программы исследований климата и окружающей среды Арктики и Суб-Арктики, выполняемой в Нансен-центрах в Санкт-Петербурге и Бергене (Норвегия). Автор был удостоен премии Правительства Санкт-Петербурга в области научно-педагогической деятельности (Направление: «Естественные и математические науки») 2010 года, в том числе, и за результаты, полученные при выполнении кандидатской диссертации.

Публикации

Результаты работы представлены в 3 публикациях из перечня ВАК, 15 тезисах и материалах конференций, 2 публикации переданы на рецензирование в международные научные периодические издания.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и иллюстративного приложения с пояснениями. Общий объём работы составляет 143 страницы; в том числе приложение – 10 страниц. Список литературы включает 132 наименования, из них 86 на английском языке.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования, дается краткий исторический обзор по исследуемой проблематике, определяются цели и задачи работы, ее теоретическая и практическая значимость.

Первая глава состоит из трех параграфов и посвящена вопросам моделирования эволюции термического режима криолитозоны. В первом параграфе рассматриваются различные подходы к моделированию термического режима криолитозоны, и отмечается, что, фактически, такие модели термического режима основаны на задаче Стефана.

Пусть влажный грунт находится в талом состоянии и имеет в начальный момент времени некоторое заданное распределение температуры по глубине $h(x)$. На поверхности грунта реализуется температура $T(0,t)=\varphi(t)$, которая при всех последующих изменениях всегда ниже температуры замерзания $T_з$. В результате образуется промерзший слой переменной толщины $\zeta = f(t)$. Его нижняя подвижная граница всегда имеет температуру замерзания. На этой границе происходит переход влаги грунта из одного агрегатного состояния в другое, на что затрачивается теплота перехода $Q_ф$. Различающиеся коэффициенты переноса промерзшей и талой зон кусочно-постоянны и скачком меняются на границе раздела зон. Тогда математическая формулировка задачи выглядит следующим образом: уравнение теплопроводности для мерзлой и талой зоны

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_м(x,\tau)}{\partial \tau} = a_м \dfrac{\partial^2 T_м(x,\tau)}{\partial x^2}; \quad \tau > 0; \quad x \in (0,\zeta); \\ \dfrac{\partial T_т(x,\tau)}{\partial \tau} = a_т \dfrac{\partial^2 T_т(x,\tau)}{\partial x^2}; \quad \tau > 0; \quad x \in (\zeta,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

граничное условие $T_м(0,\tau) = \varphi(\tau),$ начальное условие $T_m(x,0) = f(x),$ (2)

условия на границе замерзания:

$$T_м(\zeta,\tau) = T_m(\zeta,\tau) = T_з = const;$$
$$\lambda_м \frac{\partial T_м(\zeta,\tau)}{\partial x} - \lambda_m \frac{\partial T_m(\zeta,\tau)}{\partial x} = Q_ф \frac{d\zeta}{d\tau}. \quad (3)$$

Отсутствие потока тепла на бесконечности:

$$\frac{\partial T_m(\infty,t)}{\partial x} = 0.$$

Здесь $a_m, a_м$ – температуропроводность; $\lambda_m, \lambda_м$ – теплопроводность талых и мерзлых грунтов; $Q_ф$ – теплота фазового перехода, пропорциональная объемной влажности грунта.

Ввиду сложности получения аналитических решений, подобные задачи наиболее часто решаются численными методами. Во втором параграфе предлагается одномерная модель, описывающая термический режим криолитозоны для достаточно длительных временных промежутков (от года до столетия) в основу, которой положена задача Стефана (1)-(3). В этой модели на поверхности мерзлого грунта по определенному закону происходит изменение температуры воздуха T_{air}. Нижняя граница грунта, расположенная на существенном удалении от поверхности, имеет известную температуру T_g.

Решение уравнения теплопроводности для каждой из зон находится численным методом Патанкара [С.В. Патанкар, 2003], а изменение координаты фронта на межфазной границе записывается как:

$$\zeta = k\sqrt{\tau}\ , \quad (4)$$

где k – параметр, определяемый безразмерной координатой границы раздела фаз, τ – время. Метод Патанкара состоит из следующих этапов: 1. получение дискретного аналога задачи (1)-(3) равномерным разбиением области решения на элементарные контрольные объемы; 2. получение системы линейных уравнений относительно температур в узловых точках, которая решается с помощью неявной разностной схемы:

$$a_i u_i^{(k+1)} = c_i u_{i+1}^{(k+1)} + d_i u_{i-1}^{(k+1)} + b_i, \quad (5)$$

где $i = 1,2,\dots,n,$ $u_i^{(k+1)} = u(x,t_{k+1})$ – температура в узловых точках, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i – коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости, соответствующих зон.

Теорема 1. *(Об устойчивости схемы Патанкара) При условии, что* $a_i - (c_i + d_i) > 0$, *и при выполнении неравенства* $\max\limits_i \frac{e_i}{a_i - (c_i + d_i)} < 1$ *разностная схема (5) является абсолютно устойчивой, причем решение удовлетворяет неравенству* $u_i^k < C\,|Q|$.

(Здесь |Q| обозначает норму источникового члена $Qv^{(k)}$). Для реализации метода Патанкара был создан комплекс программ для ЭВМ, принятый на регистрацию Роспатентом.

В третьем параграфе излагается, что описанная выше модель использовалась для вычислительного эксперимента по расчету состояний термического режима и прогноза изменения температуры вечной мерзлоты п. Ямал. Результаты расчета температуры вечной мерзлоты в конце XX века удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, полученными на стационаре Марре–Сале, и попадают в общепринятый для этого периода интервал температур 264–268 К. Изучение эволюции термического состояния вечной мерзлоты в XXI веке проводилось с использованием сценария выбросов парниковых газов A2 Межправительственной группы экспертов по изменению климата. Установлено, что к концу XXI века ожидается значительный рост температуры многолетнемерзлых грунтов (от 270 до 275 К), который может привести к их частичному оттаиванию (рис.1). Слой вечной мерзлоты выше 2 м полностью исчезнет, а процессы протаивания распространятся на глубину 3-4м.

В реальной ситуации многолетнемерзлый грунт может находиться в структурах различных ландшафтных образований (болот, озер и т.д.). Для моделирования термического режима (а также эмиссии метана) криолитозоны, расположенной в таких ландшафтах, обычно используют комплексы программ, которые базируются в основном на различного рода эмпирических моделях. Однако, вызывает сомнения использование эмпирических моделей, так как при изучении взаимодействия криолитозоны и атмосферы возникает сложная задача моделирования связи микроскопических процессов, приводящих к таянию вечной мерзлоты (например, фазовые переходы) с макроскопическими процессами, происходящими в атмосфере (например, явление положительной обратной связи, приводящее к «парниковому эффекту» в климатической системе). Для демонстрации этой проблемы в первом и втором параграфах **второй главы** приводится описание и вычислительный эксперимент с комплексом программ «LPJ-WhyMe», в основе которого лежит эмпирическая модель эмиссии метана в атмосферу из мерзлотных торфяников, а в третьем параграфе строится аналитическая модель динамики радиуса мерзлотного озера, в основу которой положены фундаментальные законы теории фазовых переходов и применение асимптотических методов.

В первом параграфе отмечается, что модель «LPJ-WhyMe» (Lund-Potsdam-Jena Weatland Hydrology and Methane Emissions) и реализованный на её основе комплекс программ, первоначально описанные в [R. Wania, 2010], представляют собой дальнейшее развитие модели и комплекса программ «LPJ» посредством включения в них дополнительного модуля для моделирования эмиссии метана из северных торфяников.

Комплекс программ «LPJ» – это семейство моделей, описывающих крупномасштабные процессы динамики наземной растительности в сочетании с углеродным циклом в системе «земная поверхность – атмосфера» и сопутствующими гидрологическими процессами на основе входных климатических, гидрометеорологических и почвенных данных. Далее приводится краткое описание структуры «LPJ-WhyMe», а во втором параграфе рассматриваются её алгоритмические и физические особенности, для демонстрации которых был проведен вычислительный эксперимент – моделирование эмиссии метана из мерзлотных торфяников экспериментального полигона Стордален. Результаты вычислительного эксперимента представлены в виде полиномиальной аппроксимации общих потоков метана при моделировании с помощью комплексов программ «PEATLAND-VU» и «LPJ-WHyMe», а также наблюдаемых на экспериментальном полигоне (рис. 2).

Таким образом, к преимуществу «LPJ-WHyMe» относится то, что здесь описываются все три типа метанового переноса в торфяной среде. Из проведенного вычислительного эксперимента следует, что требуется дополнительная работа по улучшению концепции схемы моделирования пузырькового переноса метана, а также необходимы дополнительные исследования достоверности результатов в зависимости от вида моделирования: мелкомасштабного, крупномасштабного, глобального.

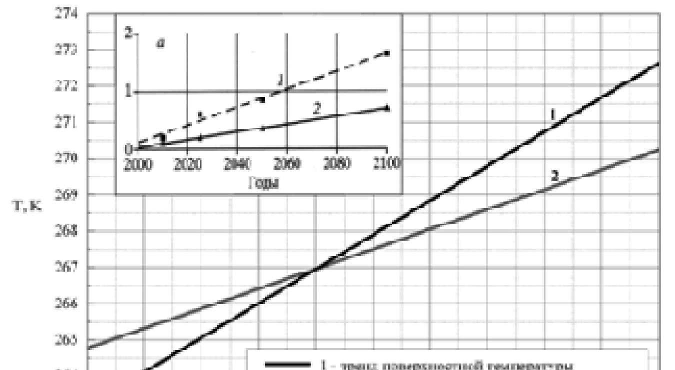


Рис. 1. Прогнозируемое изменение среднегодовой поверхностной температуры воздуха (1) и температуры вечной мерзлоты на глубине 10 м (2) для исследуемого района в 2001-2100 гг. На врезке: то же самое, но для перепада температур (в градусах) по [В.П. Мельников, 2006].

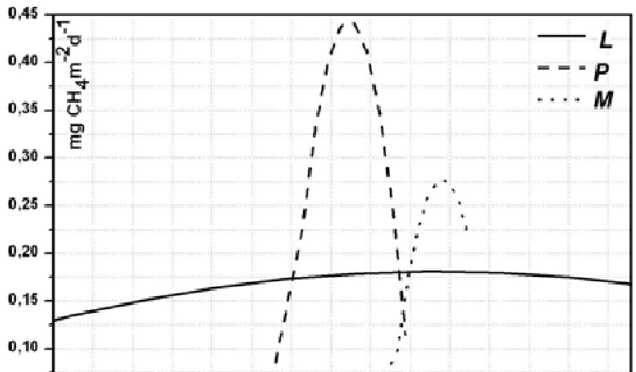


Рис. 2. Полиномиальные аппроксимации общих потоков метана за год: L – вычисленных с помощью «LPJ-WHyMe», P – вычисленных с помощью «PEATLAND-VU», M – измеренных (по оси ординат – потоки метана в мг·м$^{-2}$·д$^{-1}$, по оси абсцисс – время в сутках).

Основываясь на том, что мерзлотные озера представляют собой значительный источник метана, который при их таянии выделяется в атмосферу и что, к настоящему времени, модели мерзлотных озер достаточно плохо развиты, в третьем параграфе предлагается модель динамики протаивания мерзлотного озера. В основу модели положена задача Стефана (1)-(3) (в трехмерном случае) для описания фазового перехода при таянии мерзлотного озера. Известно, что при численном моделировании в трехмерном случае задачи Стефана возникают численные неустойчивости, поэтому возможно обратиться к неклассической схеме моделирования движения границы раздела фаз «твердое тело – жидкость», впервые предложенной в [G. Caginalp, 1989], при этом граница раздела фаз рассматривается как область конечной толщины. Далее, записывается единая для всех точек рассматриваемой физической системы «твердое тело – граница раздела фаз (конечной толщины) – жидкость» система двух дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных полей:

$$u_t = K\Delta u - \frac{b}{2}\varphi_t; \tag{6}$$

$$\alpha\xi^2\varphi_t = \xi^2\Delta\varphi + a^{-1}g(\varphi) + 2(u-\theta), \tag{7}$$

где $g = 0{,}5(\varphi - \varphi^3)$ – производная симметричного двухъямного потенциала с минимумами при φ, равном ± 1, α, ξ, a, b, K – безразмерные постоянные, которые должны быть физически интерпретированы в ходе экспериментов, θ – температура фазового перехода. Неизвестные поля в указанной системе уравнений – это поле температуры $u = u(x, y, z, t)$ и (гладкое) поле параметра порядка $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, интерпретируемое как «локальная средняя фаза».

Следуя логике асимптотических подходов и теории возмущений, уравнение (7) записывается в одномерном виде с учетом того, что фронт движется вдоль оси *z*.

Теорема 2. *Определим функцию потенциала* Φ *равенством* $\Phi' = -g(\varphi)$. *Предположим, что* $\Phi \in C^3$ *и имеет ровно два локальных минимума при* $\varphi = 1$, $\varphi = -1$*, таких, что* $\Phi(1) \neq -\Phi(-1)$. *Тогда при достаточно малых* ξ *и любых* $K_0 \in (0, h)$ *начально-краевая задача*

$$\begin{gathered} \alpha\xi^2\varphi_t = \xi^2\varphi_{zz} + a^{-1}g(\varphi), \\ \varphi = 1, \ \ z = 0, \\ \varphi = -1, \ \ z = L \end{gathered} \tag{8}$$

имеет на интервале $t \in (0, T_0(\xi))$ *решение вида* $\varphi = W\left(\dfrac{x - \eta t + x_0}{\xi}\right) + \widetilde{W}$, *где* $\eta = v / \alpha\xi$, $\varepsilon = \alpha^{-1/2}\xi^{-1}$, *а функция* $\widetilde{W}$ *удовлетворяет оценке* $\left\|\widetilde{W}_{(t)}\right\|_{H_\alpha} < \varepsilon$, $T_0 < \dfrac{\eta - x_0}{2\eta V}$, *причем параметр V и функция W удовлетворяют уравнению*

$$-VW_z = W_{zz} + a^{-1}g(W) \tag{9}$$

и условиям

$$\lim_{z\to\pm\infty} W(z) = \pm 1. \tag{10}$$

Здесь параметр *V* определяется из условия существования решений краевой задачи (9), (10).

Теперь указанная модель фазового перехода дополняется уравнением динамики радиуса озера (R), полученного методом средней кривизны:

$$\frac{dR}{dt} = \delta - \mu R^{-1}. \tag{11}$$

Здесь μ – положительная феноменологическая константа, а $\delta = const$ (при большой кривизне фронта). Физический смысл параметра δ состоит в том, что он описывает плоский фронт протаивания при ненулевой разности энтропий в жидкой и твердой фазах и определяется через микроскопические параметры a,b, которые могут быть найдены в ходе экспериментальных исследований динамики протаивания озер в тундре. Тем самым найдена связь между микроскопическими процессами, происходящими при фазовом переходе в озере, и макроскопическими процессами роста озер.

Для более реалистичного описания процесса роста озера учитываются стохастические эффекты при помощи уравнения Фоккера–Планка:

$$\frac{\partial(f(R)\rho)}{\partial R} = d\frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2}, \tag{12}$$

где $\rho = \rho(R,t)$, $R > 0$ – функция, определяющая изменение радиуса озера с течением времени; d – параметр; $f = -m/R$ (где m – постоянная). Модифицированное уравнение Фоккера–Планка в случае при $d = 0$ сводится к детерминистическому уравнению динамики радиуса озера типа с $\delta = 0$ (11). Из (12) находится вид функции $\rho(R) = \eta R^{-m/d}$, где η – константа.

Такое описание функции $\rho(R)$ близко к наблюдаемому распределению озер в тундре, которое можно определить на основании распределения Парето:

$$\rho(A) = mA_{\min}^{m} A^{-(m+1)}, \;\; A \in [A_{\min}, \infty). \tag{13}$$

Здесь $A_{\min}$ – минимальный радиус озера. Численные расчеты по стандартным алгоритмам для распределения Парето соответствуют результатам наблюдений динамики озер.

На основе результатов, представленных выше, можно получить полуэмпирическое соотношение, описывающие эмиссию метана из системы озер. Действительно, из известных данных наблюдений система озер в тундре претерпевает изменение – за счет различных процессов – прежде всего из-за протаивания вечной мерзлоты, следовательно, радиус таких озер изменяется, как и количество метана, поступающего из озера в атмосферу в зависимости от его площади. Тогда, скорость эмиссии метана определяется соотношением:

$$V_{met} = \beta(B\overline{R} - 1)\exp(-b_0 / \overline{u}(t)), \tag{14}$$

где β – некоторая постоянная, определяемая из экспериментальных данных, b_0, B – положительные константы, $\overline{R}$, $\overline{u}$ – средний радиус системы озер и их средняя температура. При разложении подэкспоненциального выражения (14) в ряд Тейлора по отклонениям температуры от некоторого усредненного ее значения, полученное выражение имеет ту же структуру, что и ряд экспериментальных соотношений для скорости эмиссии метана. В заключение второй главы приводится пример применения развитого здесь подхода для описания динамики радиуса озера к поиску решения задачи об увеличении количества метана в атмосфере.

В **третьей главе** рассматривается эволюция динамики системы «криолитозона – атмосфера» под воздействием эмиссии метана из вечной мерзлоты. В первом параграфе обсуждается современная теория критических точек и критических элементов, типы возможных бифуркаций в климатической системе. Кроме того, приводится обзор литературы по рассматриваемому вопросу. Во втором параграфе, основываясь на новом подходе к моделированию климата (использование методов теории динамических систем) строится модель атмосферы с учетом её взаимодействия с мерзлотными озерами криолитозоны. Это возможно сделать, если обобщить классическую радиационно-конвективную модель атмосферы Гуди [R.M. Goody, 1956], которая моделирует конвекцию Рэлея–Бенара в пограничном слое атмосферы с учетом теплового переноса излучения, при этом учитывается основной температурный профиль в вертикальном направлении, а также радиационное затухание.

Далее записывается краевая задача для обобщенной модели Гуди в безразмерной стандартной форме в приближении Обербека–Буссинеска с учетом действия внешней периодической силы и эмиссии метана из криолитозоны:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \sigma\Delta\mathbf{v} - \gamma\nabla P + f(x,y,z,t) + \sigma_1(\theta - \Theta_0)\mathbf{z}; \tag{15}$$

$$\theta_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta + \omega\Gamma = \Delta\theta - 3\alpha\theta + Q; \tag{16}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0; \tag{17}$$

$$C_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)C = d\Delta C - b_0^2 C. \tag{18}$$

Здесь $\mathbf{v} = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t))$ скорость потока газа с вертикальной компонентой ω, $\theta(x,y,z,t)$ – температура потока, P – давление, Γ – безразмерный адиабатический градиент, σ – число Прандтля, σ_1 – параметр плавучести, $\mathbf{z}$ – единичный вектор в вертикальном направлении, Θ_0 – основное температурное состояние $\overline{\theta}$, вычисленное в средних точках слоя, f – внешняя сила, Q – тепловой источник, α – определяется коэффициентом поглощения излучения в единицу объема, $C(x,y,z,t)$ – концентрация метана, b_0^2 – положительная постоянная (член $-b_0^2 C$ описывает деградацию молекул метана в атмосфере в результате химических реакций), d –коэффициент диффузии метана. Для простоты предполагается, что движение происходит в тонком слое Ω, определенным как $0 < z < h,\ (x, y) \in \Pi$, здесь Π – плоский прямоугольник с размерами l_1, l_2.

Для описания влияния метана на циркуляцию атмосферы, предполагается, что $\alpha = \alpha(C)$. Так как концентрация метана C очень мала, естественно предположить, что эта зависимость линейная, тогда используя ряд Тейлора для α получим:

$$\alpha \approx \alpha_0 + \alpha_1 C, \tag{19}$$

где α_0, α_1 – постоянные; α_1- феноменологический коэффициент, который может быть определен путем анализа экспериментальных данных по массе метана в атмосфере.

Рассматриваются граничные условия. Условия для **v** – это стандартные условия отсутствия скольжения

$$\mathbf{v}(x, y, z, t)\big|_{z=0} = \mathbf{v}(x, y, z, t)\big|_{z=h} = 0\,. \tag{20}$$

Граничные условия для температуры θ имеют вид:

$$\theta_z(x, y, z, t)\big|_{z=0} = \theta_z(x, y, z, t)\big|_{z=h} = 0 \tag{21}$$

и означают отсутствие потока на границе.

Граничные условия для C описывают отсутствие потока метана при $z = h$ и задает поток метана с поверхности $z = 0$:

$$C_z(x, y, z, t)\big|_{z=h} = 0; \tag{22}$$

$$C_z(x, y, z, t)\big|_{z=0} = -\mu(x, y, \theta(x, y, 0, t)), \tag{23}$$

где μ – функция, которая описывает интенсивность потока метана с поверхности.

Лемма 1. *Пусть функция* $\mu \geq 0,\ \mu \in C^1$ *ограничена в* θ*:*

$$\sup_{x, y \in \Omega, \theta \in (0, +\infty)} \mu(x, y, \theta) < c_0 < \infty$$

и внешние источники и силы $Q, f \in C^0$ *определены как*

$$\sup_{x, y \in \Omega, t > 0} Q(x, y, z, t) = q_0 < \infty,\ \ Q \geq 0;$$

$$\sup_{x, y \in \Omega, t > 0} \left| f(x, y, z, t) \right| = f_0 < \infty.$$

Тогда поля концентрации метана C и температуры θ, равномерно ограничены.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение начально-краевой задачи (15)-(23) существует и единственно при всех* $t \in (0,\infty)$ *и лежит в пространстве* $B^3_{\alpha,p} \times B_{\alpha,p} \times B_{\alpha,p}$ *(т.е.* $\forall t > 0,\ \theta \in B_{\alpha,p},\ C \in B_{\alpha,p},\ v_j^{(t)} \times B_{\alpha,p},\ j = 1,2,3$*),* $\alpha > 1/p$.

В третьем параграфе проводится бифуркационный анализ обобщенной модели Гуди. В этой модели возникают бифуркации нового типа в результате разогрева атмосферы метаном (в отличии от классической модели Гуди, где проявляется конвекция Рэлея–Бенара). Рассматривая только уравнения для теплопередачи и концентрации газа, линеаризуем их вблизи поля температуры $T_0(z)$, зависящей только от z и $C = 0$. Тогда основные уравнения записываются следующим образом:

$$T_t = K\Delta T - 3\alpha_0 T - 3\alpha_1 C T_0; \tag{24}$$

$$C_t = d\Delta C - b_0 C, \tag{25}$$

где $a_0, b_0 > 0$.

Эти уравнения рассматриваются для слоя $\Omega = \{0 < z < h,\ x \in (-l_1, l_1), y \in (-l_2, l_2)\}$, и предполагается, что $h << l_1, l_2$. Тогда, простейшие краевые условия, описывающие стандартную газовую эмиссию:

$$T_z(x,y,z)\big|_{z=0} = r_0 T(x,y,0); \tag{26}$$

$$T_z(x,y,z)\big|_{z=h} = 0; \tag{27}$$

$$C_z(x,y,z)\big|_{z=h} = 0; \tag{28}$$

$$C_z(x,y,z)\big|_{z=0} = -\beta T(x,y,z). \tag{29}$$

Последнее условие означает, что здесь рассматривается простая линейная аппроксимация: эмиссия метана пропорциональна температуре отклонения. Решения для $T = \theta$, $C = \phi$ пропорциональны $\exp(\lambda t)$, где, в общем, λ является комплексным параметром. Таким образом, получается спектральная задача:

$$\lambda\theta = K\Delta\theta - 3\alpha_0\theta + 3\alpha_1\phi T_0; \tag{30}$$

$$\lambda\phi = d\Delta\phi - b_0\phi. \tag{31}$$

Решение этой спектральной задачи можно записать как

$$-r_0 ch(k_T h) + k_T sh(k_T h) = 3\beta\alpha_1 K^{-1} \int_0^h \bar{f}_k(z,\lambda) ch(k_T(z-h))dz, \tag{32}$$

где $\bar{f}_k = T_0(z) ch(k_c(z-h))(k_c sh(k_c h))^{-1}$.

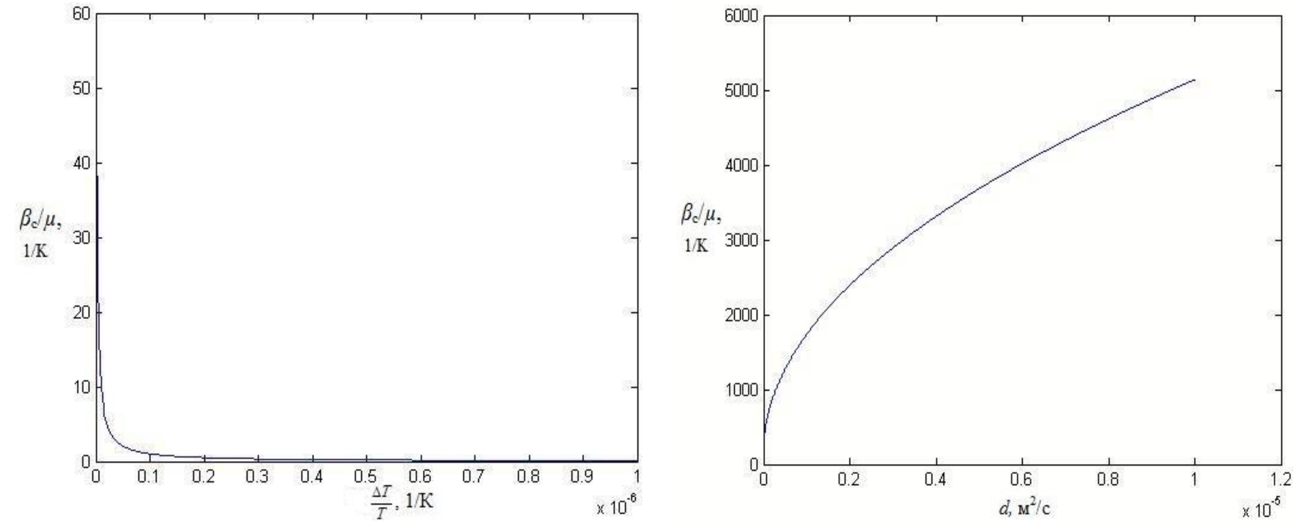
Это нелинейное уравнение следует решить для каждого k и получить корни вида $\lambda = \lambda(k)$. Все выражения, входящие в это уравнение, зависят только от модуля волнового числа $|k|$. При этом возможен случай $k = 0$ (в отличие от случая конвекции Рэлея–Бенара). Бифуркации возможны для параметров $\beta = \beta_c$ таких, что при некоторых k, соответствующих $\lambda(k)$ имеется несколько значений с нулевой действительной частью $Re\lambda(k) = 0$, а все остальные собственные значения для всех k лежат в отрицательной полуплоскости $Re\lambda < 0$. Это уравнение достаточно сложно для аналитического рассмотрения, поэтому оно решалось численно для некоторых профилей T_0. При некоторых упрощениях и использованию параметров реальной атмосферы была получена формула критического уровня эмиссии метана в атмосферу, при условии линейной зависимости от температуры:

$$\beta_c = \frac{\alpha_0}{\alpha_1 T_0}\sqrt{\frac{b_0}{d}}\,. \tag{33}$$

При этом формула оценки нового параметра в модели Гуди, определяющего зависимость коэффициента радиационного поглощения от концентрации метана имеет вид:

$$\frac{\Delta T}{TC} = \alpha_1\,. \tag{34}$$

Рис. 3 показывает, что в настоящее время поток метана слишком слаб для того, чтобы создать катастрофическую бифуркацию. Однако необходимо отметить, что если $\mu(\theta)$ меняется резко, в скачкообразной манере, тогда описанная бифуркация становится возможной. Численные расчеты по предложенной модели показывают, что необходимо увеличить современный уровень выбросов метана в 1000–1500 раз для срабатывания «метангидратного ружья», существование которого и подтверждается данной моделью.



А) Б)

Рис. 3. Зависимость критического параметра β_c/μ: А) от изменения температуры атмосферы; Б) от коэффициента диффузии метана в атмосфере.

В завершение третьего параграфа приводится

Теорема 4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 3, и* β *достаточно близко к* β_c*, то есть* $|\beta - \beta_c| < \delta$*, где* $\delta > 0$*. Далее предположим, что начальные данные* $\mathbf{v}^0, \mathrm{C}^0, \text{и}^0$ *удовлетворяют неравенствам:*

$$\begin{array}{l} \|\mathbf{v}^0\|_{H^3_\alpha} < \varepsilon,\ \|\text{и}^0 - T_0\|_{H_\alpha} < \varepsilon,\ \|C^0\|_{H_\alpha} < \varepsilon, \\ \|\mathbf{v}^0\|_{H^3_\alpha} + \|\text{и}^0 - T_0\|_{H_\alpha} + \|C^0\|_{H_\alpha} < \varepsilon \end{array}$$

, где $\varepsilon > 0$*. Тогда, при достаточно малых* δ, ε *(*$\delta < \delta_0,\ \varepsilon < \varepsilon_0(\delta)$*), в малой окрестности решения (*$\mathbf{v} = 0,\ \theta = T_0,\ C = 0$*) разрешающая полугруппа начально-краевой задачи (15)-(23) имеет нормальную форму, определенную эволюционным уравнением*

$$\frac{dX}{dt} = \lambda(\beta) X + c_0 X^2. \tag{35}$$

Здесь $X(t)$ – реальная амплитуда; $\lambda(\beta_c) = 0$, а изменение знака означает, что β проходит через β_c.

В **заключении** диссертации формулируются основные выводы и результаты исследования, в конце приводится список печатных работ автора, список использованной литературы и приложение.

Список основных публикаций по теме диссертации

Публикации в журналах, входящих в перечень ВАК ведущих периодических изданий

1. *Судаков, И.А.* Моделирование термического режима вечной мерзлоты при современных изменениях климата / И.А. Судаков, Л.П. Бобылев, С.А. Береснев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 7. – 2011. – №1. – С. 81-88.

2. *Судаков, И.А.* Динамика протаивания мерзлотных озер и изменения климата / И.А. Судаков // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. – 2011. – №2. – С. 74-79.

3. *Судаков, И.А.* Анализ физических основ и алгоритмических особенностей нового метанового модуля динамической глобально-вегетационной модели LPJ / И.А. Судаков // Ученые записки Российского государственного гидрометеорологического университета. – 2011. – №19. – С. 140-151.

Публикации в сборниках материалов конференций

1. *Судаков, И.А.* Моделирование эволюции термического состояния криолитозоны субарктических регионов при глобальном потеплении климата / И.А. Судаков, Л.П. Бобылев,

С.А. Береснев // Материалы межд. конф. «Криогенные ресурсы полярных и горных регионов». – Москва, Научный совет по криологии Земли РАН, 2008. – С. 281-283.

2. *Судаков, И.А.* Физические модели оценки влияния изменений климата на вечную мерзлоту / И.А. Судаков // Материалы II Всероссийской научно-практич. конф. «Проблемы недропользования». – Екатеринбург, УрО РАН, 2008. – С. 250-252.

3. *Судаков, И.А.* Эволюция термического состояния вечной мерзлоты при глобальном потеплении климата / И.А. Судаков // Инф. бюллетень Всероссийской научной конференции студентов-физиков-14. – Уфа, АСФ России, 2008. – С. 474-475.

4. *Судаков, И.* Моделирование транспорта почвенного метана в моделях эмиссии метана из вечной мерзлоты / И. Судаков, О. Йоханнессен, Л. Бобылев // Сборник статей по материалам молодежной научно-практич. конф. «Актуальные проблемы эволюции географического пространства». – СПб., СПбГУ, 2009. – С. 13-14.

5. *Судаков, И.А.* Алгоритмические особенности новой метановой модификации глобально-вегетативной модели LPJ / И.А. Судаков, Л.П. Бобылев // Сборник научных трудов по итогам Второго молодежного экологического конгресса «Северная Пальмира». – СПб., НИЦЭБ РАН, 2010. – С. 23-25.

Публикации в различных изданиях на английском языке

1. *Sudakov, I.* Permafrost thermal regime simulation in response to global warming / I. Sudakov, L. Bobylev, S. Beresnev // Abstracts of Conference: "Polar Research – Arctic and Antarctic Perspectives in the International Polar Year". – St. Petersburg, Russia, 2008. – P. 299.

2. *Sudakov, I.* Storage of greenhouse gases in permafrost: the problem of the carbon bomb / I. Sudakov // Communities of Change – Building and IPY Legacy: Book of abstracts. – Whitehorse, Canada, 2009. – P. 119-120.

3. *Sudakov, I.* Simulation of soil gases transport in the models of greenhouse gases emission from permafrost / I. Sudakov // Proceedings of the Arcticnet Annual Scientific Meeting. – Victoria, Canada, 2009. – P. 135-136.

4. *Sudakov, I.A.* Modelling methane emissions from Siberian permafrost peatlands [Электронный ресурс] / I.A. Sudakov, R. Wania, L.P. Bobylev, O.M. Johannessen // International Polar Year Science Conference Abstracts. – Oslo, Norway, 2010. – Oxford Abstracts. - 1 электрон. опт. диск. - Загл. с экрана.

5. *Sudakov, I.* Methane Armageddon: Is it possible? / I. Sudakov, S. Vakulenko // Proceedings of Workshops on Inverse Problems, Data, Mathematical Statistics and Ecology. – Linköping, Sweden, 2010. – P. 115-119.

6. *Sudakov, I.* Asymptotic approach to permafrost methane emission problem / I. Sudakov, S. Vakulenko // Berichte zur Polar- und Meeresforschung, Special Issue – 2010. – №623. – P. 10-11.

7. *Sudakov, I.* Permafrost methane emission as a detector of the future regional Arctic climate change / I. Sudakov, S. Vakulenko // Abstract Volume. The Arctic as a Messenger for Global Processes – Climate Change and Pollution. – Copenhagen, Denmark, 2011. – P.174.

8. *Sudakov, I.* Detection of climate system bifurcations: Arctic permafrost methane emission contribution. / I. Sudakov, S. Vakulenko // Abstract Proceedings of International Conference: Climate Changes in Polar and Subpolar Region. – Moscow, Russia, 2011. – P. 64-65.

9. *Sudakov, I.* New mathematical approach to permafrost methane emission modeling [Электронный ресурс] / I. Sudakov, S. Vakulenko // XXV IUGG General Assembly Abstracts. – Melbourne, Australia, 2011. - 1 электрон. опт. диск. - Загл. с экрана.

10. *Sudakov, I.* Study of the climate system bifurcations: permafrost methane emission case. / I. Sudakov, S. Vakulenko // Abstract Proceedings of IMA Conference on the Mathematics of the Climate System. – Reading, UK. –P. 4.

Подписано к печати 21.12.2011. Формат 60.84/16
Гарнитура Times New Roman. Тираж 100 экз.
Усл. печ. л. 1,04. Заказ № 635

Отпечатано в ЗАО «Новгородский технопарк».
173003, Великий Новгород, ул. Б. Санкт-Петербургская, 41.
Тел. (8162) 73-76-76